Tutorium 9

Funktionentheorie

7. und 8. Juli 2025

Konforme Abbildungen

Definition

Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt *konform*, falls sie holomorph und bijektiv ist.

Konforme Abbildungen

Definition

Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ heißt *konform*, falls sie holomorph und bijektiv ist.
Existiert eine konforme Abbildung $f\colon U \to V$, so heißen U und V *konform äquivalent*.

Konforme Abbildungen

Definition

Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ heißt *konform*, falls sie holomorph und bijektiv ist.
Existiert eine konforme Abbildung $f\colon U \to V$, so heißen U und V *konform äquivalent*.

Bemerkung. Ist f konform, so ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und $f^{-1}\colon V \to U$ ist ebenfalls holomorph.

Das Lemma von Schwarz

Das Lemma von Schwarz

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe.

Das Lemma von Schwarz

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe.

Lemma

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt

Das Lemma von Schwarz

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe.

Lemma

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt

1. $|f(z)| \leq |z|$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$. *Gleichheit gilt genau dann für ein* $0 \neq z_0 \in \mathbb{D}$, *wenn* $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$ *und ein* $\theta \in \mathbb{R}$.

Das Lemma von Schwarz

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe.

Lemma

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt

1. $|f(z)| \leq |z|$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$. *Gleichheit gilt genau dann für ein* $0 \neq z_0 \in \mathbb{D}$, *wenn* $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$ *und ein* $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $|f'(0)| \leq 1$ *und Gleichheit gilt genau dann, wenn* $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$ *und ein* $\theta \in \mathbb{R}$.

Automorphismen von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$

Automorphismen von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine konforme Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ heißt *Automorphismus* von Ω. Wir schreiben

$$\mathrm{Aut}(\Omega) := \{f : \Omega \to \Omega : f \text{ ist ein Automorphismus}\}.$$

Automorphismen von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine konforme Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ heißt *Automorphismus* von Ω. Wir schreiben

$$\mathrm{Aut}(\Omega) := \{f : \Omega \to \Omega : f \text{ ist ein Automorphismus}\}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt:

Automorphismen von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine konforme Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ heißt *Automorphismus* von Ω. Wir schreiben

$$\mathrm{Aut}(\Omega) := \{f : \Omega \to \Omega : f \text{ ist ein Automorphismus}\}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\psi_\alpha : \theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{D}\}, \qquad \psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere komplexe Halbebene.

Der Riemannsche Abbildungssatz

Der Riemannsche Abbildungssatz

Theorem (Riemann)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ *offen und einfach zusammenhängend. Dann existiert für jedes* $z_0 \in \Omega$ *eine eindeutige konforme Abbildung* $F\colon \Omega \to \mathbb{D}$ *mit*

$$F(z_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad F'(z_0) > 0.$$

Der Riemannsche Abbildungssatz

Theorem (Riemann)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Dann existiert für jedes $z_0 \in \Omega$ eine eindeutige konforme Abbildung $F : \Omega \to \mathbb{D}$ mit

$$F(z_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad F'(z_0) > 0.$$

Insbesondere sind alle offenen, nicht-leeren, einfach zusammenhängenden echte Teilmengen von $\mathbb{C}$ konform äquivalent.

Der Riemannsche Abbildungssatz

Theorem (Riemann)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Dann existiert für jedes $z_0 \in \Omega$ eine eindeutige konforme Abbildung $F\colon \Omega \to \mathbb{D}$ mit

$$F(z_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad F'(z_0) > 0.$$

Insbesondere sind alle offenen, nicht-leeren, einfach zusammenhängenden echte Teilmengen von $\mathbb{C}$ konform äquivalent.
Wir wiederholen an dieser Stelle nicht die Sätze von Arzelà–Ascoli und Montel, allerdings ist gerade Ersterer natürlich extrem wichtig, auch über die Funktionentheorie hinaus.