Tutorium 10

Funktionentheorie

14. und 15. Juli 2025

Unendliche Produkte

Unendliche Produkte

Definition

Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$. Wir sagen, dass das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

gegen L konvergiert, falls $L := \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} (1 + a_n)$ existiert.

Unendliche Produkte

Definition

Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$. Wir sagen, dass das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$$

gegen L konvergiert, falls $L := \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1 + a_n)$ existiert.

Lemma

Falls $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$ gilt, so konvergiert $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ und der Grenzwert des Produkts ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

Unendliche Produkte

Proposition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* $F_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *eine Folge holomorpher Funktionen. Falls* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ *existiert, sodass*

$$\forall z \in \Omega : |F_n(z) - 1| \leq c_n \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

so gilt:

Unendliche Produkte

Proposition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* $F_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *eine Folge holomorpher Funktionen. Falls* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ *existiert, sodass*

$$\forall z \in \Omega : |F_n(z) - 1| \leq c_n \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

so gilt:

1. $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ *konvergiert gleichmäßig in* Ω *gegen eine holomorphe Funktion* $G \colon \Omega \to \mathbb{C}$.

Unendliche Produkte

Proposition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* $F_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *eine Folge holomorpher Funktionen. Falls* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ *existiert, sodass*

$$\forall z \in \Omega : |F_n(z) - 1| \leq c_n \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

so gilt:

1. $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ *konvergiert gleichmäßig in* Ω *gegen eine holomorphe Funktion* $G \colon \Omega \to \mathbb{C}$.
2. *Für jedes* $z \in \Omega$ *gilt* $G(z) = 0$ *genau dann, wenn* $F_n(z) = 0$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$.

Unendliche Produkte

Proposition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* $F_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *eine Folge holomorpher Funktionen. Falls* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ *existiert, sodass*

$$\forall z \in \Omega : |F_n(z) - 1| \leq c_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

so gilt:

1. $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ *konvergiert gleichmäßig in* Ω *gegen eine holomorphe Funktion* $G : \Omega \to \mathbb{C}$.
2. *Für jedes* $z \in \Omega$ *gilt* $G(z) = 0$ *genau dann, wenn* $F_n(z) = 0$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Falls* $G(z) \neq 0$ *für ein* $z \in \Omega$ *ist, so gilt*

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}.$$

Das Eulerprodukt für sin

Theorem (Euler)

Es gilt

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Das Eulerprodukt für sin

Theorem (Euler)

Es gilt

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Frage: Können wir auch andere holomorphe Funktionen „faktorisieren“?

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Definition (Weierstraß'sche Elementarfaktoren)

Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die folgenden holomorphen Funktionen:

$$E_0(z) = 1 - z, \qquad E_k(z) := (1 - z)\mathrm{e}^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}}.$$

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Definition (Weierstraß'sche Elementarfaktoren)

Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die folgenden holomorphen Funktionen:

$$E_0(z) = 1 - z, \qquad E_k(z) := (1 - z)\mathrm{e}^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}}.$$

Motivation: Hat f Nullstellen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so konvergiert „naive“ Faktorisierung $\prod_{k=1}^{\infty}(a_n - z)$ nicht notwendigerweise!

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Definition (Weierstraß'sche Elementarfaktoren)

Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die folgenden holomorphen Funktionen:

$$E_0(z) = 1 - z, \qquad E_k(z) := (1 - z)\mathrm{e}^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}}.$$

Motivation: Hat f Nullstellen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so konvergiert „naive" Faktorisierung $\prod_{k=1}^{\infty}(a_n - z)$ nicht notwendigerweise! Gibt es bessere Faktoren, sagen wir mit Nullstelle 1, also als $1 - z$?

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Definition (Weierstraß'sche Elementarfaktoren)

Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die folgenden holomorphen Funktionen:

$$E_0(z) = 1 - z, \qquad E_k(z) := (1 - z)\mathrm{e}^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}}.$$

Motivation: Hat f Nullstellen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so konvergiert „naive" Faktorisierung $\prod_{k=1}^{\infty}(a_n - z)$ nicht notwendigerweise! Gibt es bessere Faktoren, sagen wir mit Nullstelle 1, also als $1 - z$?

Offensichtlich hat jedes E_k eine einfache Nullstelle bei 1.

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Definition (Weierstraß'sche Elementarfaktoren)

Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die folgenden holomorphen Funktionen:

$$E_0(z) = 1 - z, \qquad E_k(z) := (1 - z)\mathrm{e}^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}}.$$

Motivation: Hat f Nullstellen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert „naive" Faktorisierung $\prod_{k=1}^{\infty}(a_n - z)$ nicht notwendigerweise! Gibt es bessere Faktoren, sagen wir mit Nullstelle 1, also als $1 - z$?
Offensichtlich hat jedes E_k eine einfache Nullstelle bei 1. Zudem gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, dass

$$1 - z = \exp(\mathrm{Log}(1 - z)) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\right).$$

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Definition (Weierstraß'sche Elementarfaktoren)

Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die folgenden holomorphen Funktionen:

$$E_0(z) = 1 - z, \qquad E_k(z) := (1-z)\mathrm{e}^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}.$$

Motivation: Hat f Nullstellen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert „naive“ Faktorisierung $\prod_{k=1}^{\infty}(a_n - z)$ nicht notwendigerweise! Gibt es bessere Faktoren, sagen wir mit Nullstelle 1, also als $1-z$?

Offensichtlich hat jedes E_k eine einfache Nullstelle bei 1. Zudem gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, dass

$$1 - z = \exp(\operatorname{Log}(1-z)) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\right).$$

Daher kann $E_k(z) = (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k}\right)$ für $|z| \leq 1$ beliebig nahe bei 1 gewählt werden, vgl. Lemma 4.7, wodurch stets Konvergenz erreicht werden kann.

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Theorem (Weierstraß)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *mit* $|a_n| \to \infty$. *Dann existiert eine ganze Funktion* f *mit Nullstellen genau bei den* a_n *(mit Vielfachheit). Jede andere solche ganze Funktion ist von der Form* $f\mathrm{e}^g$ *mit* g *ganz.*

Der Weierstraß'sche Produktsatz

Theorem (Weierstraß)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $|a_n| \to \infty$. Dann existiert eine ganze Funktion f mit Nullstellen genau bei den a_n (mit Vielfachheit). Jede andere solche ganze Funktion ist von der Form $f\mathrm{e}^g$ mit g ganz.

Der Beweis aus dem Skript liefert mit $m := \#\{n : a_n = 0\}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ohne den Wert 0, dass

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{b_n}\right).$$

Produktsatz von Hadamard

Produktsatz von Hadamard

Definition

Eine ganze Funktion f hat Wachstumsordnung $\leq \rho$, falls Konstanten $A, B > 0$ existieren, sodass

$$|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{B|z|^\rho} \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Produktsatz von Hadamard

Definition

Eine ganze Funktion f hat Wachstumsordnung $\leq \rho$, falls Konstanten $A, B > 0$ existieren, sodass

$$|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{B|z|^\rho} \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. *Die Wachstumsordnung* ρ_0 von f ist das Infimum über alle ρ, für welche (1) erfüllt ist.

Produktsatz von Hadamard

Definition

Eine ganze Funktion f hat Wachstumsordnung $\leq \rho$, falls Konstanten $A, B > 0$ existieren, sodass

$$|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{B|z|^\rho} \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. *Die Wachstumsordnung* ρ_0 von f ist das Infimum über alle ρ, für welche (1) erfüllt ist.

Theorem (Hadamard)

Seien f, m und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie auf der vorherigen Folie. f habe zudem Wachstumsordnung ρ_0 und $k \in \mathbb{Z}$ sei so gewählt, dass $k \leq \rho_0 < k+1$ (d.h. $k = \lfloor \rho_0 \rfloor$). Dann gilt

$$f(z) = \mathrm{e}^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{b_n}\right),$$

wobei P ein Polynom von Grad $\leq k$ ist.

Produktsatz von Hadamard

Definition

Eine ganze Funktion f hat Wachstumsordnung $\leq \rho$, falls Konstanten $A, B > 0$ existieren, sodass

$$|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{B|z|^\rho} \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. *Die Wachstumsordnung* ρ_0 von f ist das Infimum über alle ρ, für welche (1) erfüllt ist.

Theorem (Hadamard)

Seien f, m und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie auf der vorherigen Folie. f habe zudem Wachstumsordnung ρ_0 und $k \in \mathbb{Z}$ sei so gewählt, dass $k \leq \rho_0 < k+1$ (d.h. $k = \lfloor \rho_0 \rfloor$). Dann gilt

$$f(z) = \mathrm{e}^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{b_n}\right),$$

wobei P ein Polynom von Grad $\leq k$ ist.

Produktsatz von Hadamard

Definition

Eine ganze Funktion f hat Wachstumsordnung $\leq \rho$, falls Konstanten $A, B > 0$ existieren, sodass

$$|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{B|z|^{\rho}} \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. *Die Wachstumsordnung* ρ_0 von f ist das Infimum über alle ρ, für welche (1) erfüllt ist.

Theorem (Hadamard)

Seien f, m und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie auf der vorherigen Folie. f habe zudem Wachstumsordnung ρ_0 und $k \in \mathbb{Z}$ sei so gewählt, dass $k \leq \rho_0 < k+1$ (d.h. $k = \lfloor \rho_0 \rfloor$). Dann gilt

$$f(z) = \mathrm{e}^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{b_n}\right),$$

wobei P ein Polynom von Grad $\leq k$ ist.