Tutorium 1

Funktionentheorie

24. & 28. April 2026

Was bedeutet „Ableitung"?

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston[1]:

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

Was bedeutet „Ableitung"?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics" von William P. Thurston[1]:

(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston[1]:

(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

(2) Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g \cdot g'$, etc.

[1] `https://arxiv.org/abs/math/9404236`

Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston[1]:

(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

(2) Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g \cdot g'$, etc.

(3) Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ϵ there is a δ such that when $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left|\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d\right| < \epsilon.$$

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

Was bedeutet „Ableitung"?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics" von William P. Thurston[1]:

(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

(2) Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g \cdot g'$, etc.

(3) Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ϵ there is a δ such that when $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

(4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston[1]:

(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

(2) Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g \cdot g'$, etc.

(3) Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ϵ there is a δ such that when $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

(4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.

(5) Rate: the instantaneous speed of $f(t)$, when t is time.

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston[1]:

(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

(2) Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g \cdot g'$, etc.

(3) Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ϵ there is a δ such that when $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

(4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.

(5) Rate: the instantaneous speed of $f(t)$, when t is time.

(6) Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston[1]:

(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

(2) Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g \cdot g'$, etc.

(3) Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ϵ there is a δ such that when $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

(4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.

(5) Rate: the instantaneous speed of $f(t)$, when t is time.

(6) Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.

(7) Microscopic: The derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston[1]:

(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

(2) Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g \cdot g'$, etc.

(3) Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ϵ there is a δ such that when $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

(4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.

(5) Rate: the instantaneous speed of $f(t)$, when t is time.

(6) Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.

(7) Microscopic: The derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston[1]:

(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

(2) Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g \cdot g'$, etc.

(3) Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ϵ there is a δ such that when $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

(4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.

(5) Rate: the instantaneous speed of $f(t)$, when t is time.

(6) Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.

(7) Microscopic: The derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.

[1] https://arxiv.org/abs/math/9404236

„[...] one person's clear mental image is another person's intimidation:

(37) The derivative of a real-valued function f in a domain D is the Lagrangian section of the cotangent bundle $T^*(D)$ that gives the connection for for the unique flat connection on the trivial $\mathbb{R}$-bundle $D \times \mathbb{R}$ for which the graph of f is parallel."

Holomorphe Funktionen

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

heißt *holomorph im Punkt* $z_0 \in \Omega$, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. Wir nennen $f'(z_0)$ die *Ableitung* von f im Punkt z_0.

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Gegeben $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ betrachten wir die Funktionen $\operatorname{Re} f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ als Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ indem wir $z = x + \mathrm{i}y \in \Omega$ mit $(x, y) \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ identifizieren.

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Gegeben $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ betrachten wir die Funktionen $\operatorname{Re} f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ als Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ indem wir $z = x + \mathrm{i}y \in \Omega$ mit $(x, y) \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ identifizieren.
Hierdurch können wir $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F\colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ identifizieren.

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Gegeben $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ betrachten wir die Funktionen $\operatorname{Re} f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ als Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ indem wir $z = x + \mathrm{i}y \in \Omega$ mit $(x, y) \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ identifizieren.
Hierdurch können wir $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F\colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ identifizieren.

Theorem

Die Funktion f ist genau dann holomorph in z_0, wenn die mit ihr identifizierte Funktion $F = (u, v)^T$ in z_0 (reell) differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen in diesem Punkt die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \textit{and} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Interpretation

Erinnern wir uns zu Beginn an Charakterisierung (6) der Ableitung, nämlich als beste lineare Approximation.

Interpretation

Erinnern wir uns zu Beginn an Charakterisierung (6) der Ableitung, nämlich als beste lineare Approximation.
Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch $z \mapsto az$ für ein $a \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$-(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$-(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$.

- Die *reelle* Ableitung $DF\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von F ist linear – allerdings $\mathbb{R}$-linear, d.h. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$.

$\mathbb{C}$-(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$.

- Die *reelle* Ableitung $DF : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von F ist linear – allerdings $\mathbb{R}$-linear, d.h. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$.
  Diese Gleichheit gilt nicht zwingend $\forall \lambda \in \mathbb{C}$!

$\mathbb{C}$-(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$.

- Die *reelle* Ableitung $DF : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von F ist linear – allerdings $\mathbb{R}$-linear, d.h. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$.
  Diese Gleichheit gilt nicht zwingend $\forall \lambda \in \mathbb{C}$!
- Fakt: Die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind direkte Summe $\mathbb{C}$-linearer und $\mathbb{C}$-anti-linearer[2] Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

[2] Anti-linear bedeutet, dass $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

$\mathbb{C}$-(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$.

- Die *reelle* Ableitung $DF\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von F ist linear – allerdings $\mathbb{R}$-linear, d.h. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$.
  Diese Gleichheit gilt nicht zwingend $\forall \lambda \in \mathbb{C}$!
- Fakt: Die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind direkte Summe $\mathbb{C}$-linearer und $\mathbb{C}$-anti-linearer[2] Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
  In der Tat, eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann zerlegt werden in $\frac{1}{2}(L(z) - \mathrm{i}L(\mathrm{i}z))$ ($\mathbb{C}$-linear) und $\frac{1}{2}(L(z) + \mathrm{i}L(\mathrm{i}z))$ ($\mathbb{C}$-anti-linear).[3]

[2] Anti-linear bedeutet, dass $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

[3] Dies erinnert eventuell an Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als direkte Summe achsen- und punktsymmetrischer Funktionen. Dies geht natürlich auch ein wenig allgemeiner mittels beliebiger Involutionen, s. beispielsweise `https://math.stackexchange.com/questions/4286284`.

$\mathbb{C}$-(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$.

- Die *reelle* Ableitung $DF\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von F ist linear – allerdings $\mathbb{R}$-linear, d.h. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$.
  Diese Gleichheit gilt nicht zwingend $\forall \lambda \in \mathbb{C}$!
- Fakt: Die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind direkte Summe $\mathbb{C}$-linearer und $\mathbb{C}$-anti-linearer[2] Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
  In der Tat, eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann zerlegt werden in $\frac{1}{2}(L(z) - \mathrm{i}L(\mathrm{i}z))$ ($\mathbb{C}$-linear) und $\frac{1}{2}(L(z) + \mathrm{i}L(\mathrm{i}z))$ ($\mathbb{C}$-anti-linear).[3]
- Die Cauchy-Riemann-Gleichungen garantieren, dass die Abbildung DF $\mathbb{C}$-linear ist, d.h. $\mathbb{C}$-anti-linearen Teil $= 0$ hat.

[2] Anti-linear bedeutet, dass $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

[3] Dies erinnert eventuell an Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als direkte Summe achsen- und punktsymmetrischer Funktionen. Dies geht natürlich auch ein wenig allgemeiner mittels beliebiger Involutionen, s. beispielsweise `https://math.stackexchange.com/questions/4286284`.

Zum Vergleich des Quotienten- und Wurzelkriteriums

Zum Vergleich des Quotienten- und Wurzelkriteriums

Das Wurzelkriterium ist *strikt* stärker als das Quotientenkriterium: Für

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2^{-n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

Zum Vergleich des Quotienten- und Wurzelkriteriums

Das Wurzelkriterium ist *strikt* stärker als das Quotientenkriterium: Für

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2^{-n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

haben wir $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, also gilt gemäß „Sandwich-Lemma“ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$.

Zum Vergleich des Quotienten- und Wurzelkriteriums

Das Wurzelkriterium ist *strikt* stärker als das Quotientenkriterium: Für

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2^{-n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

haben wir $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, also gilt gemäß „Sandwich-Lemma" $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$. Allerdings ist

$$\frac{|a_{2n+1}|}{|a_{2n}|} = \frac{2^{-(2n+1)+1}}{2^{-2n}} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n+1}|} = \frac{2^{-(2n+2)}}{2^{-(2n+1)+1}} = \frac{1}{4},$$

d.h. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ konvergiert *nicht*. Das Quotientenkriterium ist hier also im Gegensatz zum Wurzelkriterium nicht anwendbar[4].

[4] Man beachte, dass man auch unter Verwendung der Variante des Quotientenkriteriums mit Limes superior und Limes inferior keine Aussage erhält.