Tutorium 2

Funktionentheorie

05. Mai 2026

Kurven

Kurven

Für Definition einer Kurve, ihrer Umkehrung und Eigenschaften wie *geschlossen*, *einfach* oder *äquivalent*, s. Vorlesung (im Wesentlichen ist eine Kurve eine stetige Abbildung $z\colon [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ mit $z \in C_p^1([a,b])$).

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Merkregel für/Intuition zum Faktor $z'(t)$ (rein heuristisch):

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Merkregel für/Intuition zum Faktor $z'(t)$ (rein heuristisch):

- „Wie bei der Substitutionsregel“

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Merkregel für/Intuition zum Faktor $z'(t)$ (rein heuristisch):

- „Wie bei der Substitutionsregel“
- Bezieht „Geschwindigkeit“ der Parametrisierung mit ein

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Merkregel für/Intuition zum Faktor $z'(t)$ (rein heuristisch):

- „Wie bei der Substitutionsregel“
- Bezieht „Geschwindigkeit“ der Parametrisierung mit ein
- Unabhängigkeit von Parametrisierung (vorausgesetzt, parametrisierte Kurven sind äquivalent im Sinne der Definition aus der Vorlesung)

(Holomorphe) Stammfunktionen

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt $F : \Omega \to \mathbb{C}$ *Stammfunktion (von f)*, falls F holomorph in Ω ist mit $F' = f$.

(Holomorphe) Stammfunktionen

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt $F : \Omega \to \mathbb{C}$ *Stammfunktion (von f)*, falls F holomorph in Ω ist mit $F' = f$.

Theorem

Mit Ω, f und F wie oben, gilt für jede Kurve γ in Ω mit Anfangspunkt w_0 und Endpunkt w_1, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(w_1) - F(w_0).$$

Insbesondere gilt, für jede geschlossene Kurve γ (also mit $w_0 = w_1$):

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$