

# Tutorium 3

## Funktionentheorie

08. & 12. Mai 2026

# Etwas zu Dreiecken

# Etwas zu Dreiecken

## Theorem

Seien  $D \subset \mathbb{C}$  eine offene Kreisscheibe und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig mit

$$\int_T f(z) dz = 0$$

für jedes Dreieck  $T \subset D$ . Dann besitzt  $f$  eine Stammfunktion in  $D$ .

# Etwas zu Dreiecken

## Theorem

Seien  $D \subset \mathbb{C}$  eine offene Kreisscheibe und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig mit

$$\int_T f(z) dz = 0$$

für jedes Dreieck  $T \subset D$ . Dann besitzt  $f$  eine Stammfunktion in  $D$ .

## Lemma (Goursat's lemma)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt für jedes Dreieck  $T$ , das mitsamt seinem „Inneren“ in  $\Omega$  enthalten ist,

$$\int_T f(z) dz = 0.$$

# Konvexe Mengen (in $\mathbb{C}$ )

# Konvexe Mengen (in $\mathbb{C}$ )

## Definition

Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *konvex*, falls für alle  $w_1, w_2 \in \Omega$  die Verbindungsstrecke  $[w_1, w_2] := \{tw_2 + (1-t)w_1 : t \in [0, 1]\}$  von  $w_1$  nach  $w_2$  vollständig in  $\Omega$  enthalten ist:

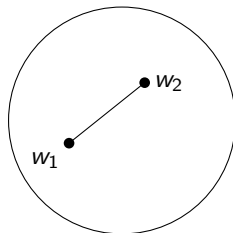
$$tw_2 + (1-t)w_1 \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$$

# Konvexe Mengen (in $\mathbb{C}$ )

## Definition

Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *konvex*, falls für alle  $w_1, w_2 \in \Omega$  die Verbindungsstrecke  $[w_1, w_2] := \{tw_2 + (1-t)w_1 : t \in [0, 1]\}$  von  $w_1$  nach  $w_2$  vollständig in  $\Omega$  enthalten ist:

$$tw_2 + (1-t)w_1 \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$$



# Sternförmige Mengen (in $\mathbb{C}$ )

# Sternförmige Mengen (in $\mathbb{C}$ )

## Definition

Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt bezüglich eines Punktes  $z_0 \in \Omega$  *sternförmig*, falls für jedes  $w \in \Omega$  die Verbindungsstrecke  $[w, z_0] := \{tz_0 + (1-t)w : t \in [0, 1]\}$  von  $w$  nach  $z_0$  vollständig in  $\Omega$  enthalten ist:

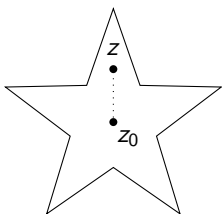
$$tz_0 + (1-t)w \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$$

# Sternförmige Mengen (in $\mathbb{C}$ )

## Definition

Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt bezüglich eines Punktes  $z_0 \in \Omega$  *sternförmig*, falls für jedes  $w \in \Omega$  die Verbindungsstrecke  $[w, z_0] := \{tz_0 + (1-t)w : t \in [0, 1]\}$  von  $w$  nach  $z_0$  vollständig in  $\Omega$  enthalten ist:

$$tz_0 + (1-t)w \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$$

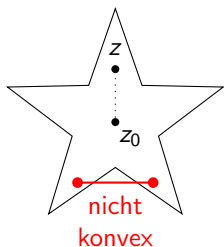


# Sternförmige Mengen (in $\mathbb{C}$ )

## Definition

Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt bezüglich eines Punktes  $z_0 \in \Omega$  *sternförmig*, falls für jedes  $w \in \Omega$  die Verbindungsstrecke  $[w, z_0] := \{tz_0 + (1-t)w : t \in [0, 1]\}$  von  $w$  nach  $z_0$  vollständig in  $\Omega$  enthalten ist:

$$tz_0 + (1-t)w \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$$

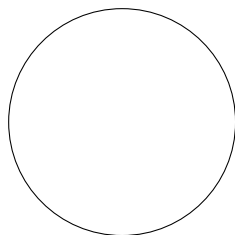
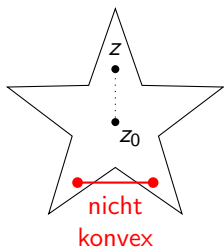


# Sternförmige Mengen (in $\mathbb{C}$ )

## Definition

Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt bezüglich eines Punktes  $z_0 \in \Omega$  *sternförmig*, falls für jedes  $w \in \Omega$  die Verbindungsstrecke  $[w, z_0] := \{tz_0 + (1-t)w : t \in [0, 1]\}$  von  $w$  nach  $z_0$  vollständig in  $\Omega$  enthalten ist:

$$tz_0 + (1-t)w \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$$

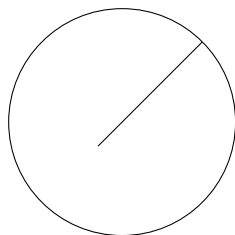
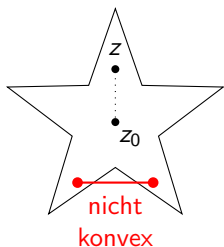


# Sternförmige Mengen (in $\mathbb{C}$ )

## Definition

Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt bezüglich eines Punktes  $z_0 \in \Omega$  *sternförmig*, falls für jedes  $w \in \Omega$  die Verbindungsstrecke  $[w, z_0] := \{tz_0 + (1-t)w : t \in [0, 1]\}$  von  $w$  nach  $z_0$  vollständig in  $\Omega$  enthalten ist:

$$tz_0 + (1-t)w \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$$

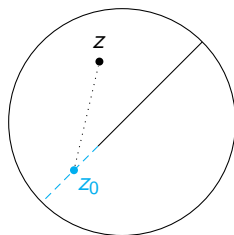
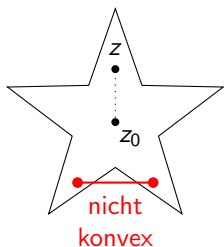


# Sternförmige Mengen (in $\mathbb{C}$ )

## Definition

Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt bezüglich eines Punktes  $z_0 \in \Omega$  *sternförmig*, falls für jedes  $w \in \Omega$  die Verbindungsstrecke  $[w, z_0] := \{tz_0 + (1-t)w : t \in [0, 1]\}$  von  $w$  nach  $z_0$  vollständig in  $\Omega$  enthalten ist:

$$tz_0 + (1-t)w \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$$



# Homotope Kurven

## Definition

Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und seien  $\gamma_0, \gamma_1$  zwei Kurven in  $\Omega$ , die im gleichen Punkt  $\alpha$  beginnen und im gleichen Punkt  $\beta$  enden. Die Kurven  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  heißen *homotop* in  $\Omega$ , wenn es für alle Parametrisierungen  $z_0, z_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  von  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  eine stetige Abbildung  $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega, (t, s) \rightarrow \Gamma_s(t)$  gibt mit

$$\Gamma_s(a) = \alpha, \quad \Gamma_s(b) = \beta \quad \forall s \in [0, 1]$$

$$\Gamma_0(t) = z_0(t), \quad \Gamma_1(t) = z_1(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

# Homotope Kurven

## Definition

Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und seien  $\gamma_0, \gamma_1$  zwei Kurven in  $\Omega$ , die im gleichen Punkt  $\alpha$  beginnen und im gleichen Punkt  $\beta$  enden. Die Kurven  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  heißen *homotop* in  $\Omega$ , wenn es für alle Parametrisierungen  $z_0, z_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  von  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  eine stetige Abbildung  $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega, (t, s) \rightarrow \Gamma_s(t)$  gibt mit

$$\Gamma_s(a) = \alpha,$$

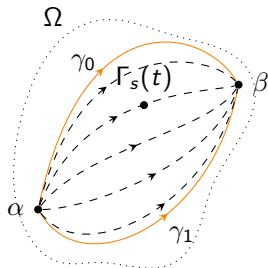
$$\Gamma_s(b) = \beta$$

$$\forall s \in [0, 1]$$

$$\Gamma_0(t) = z_0(t),$$

$$\Gamma_1(t) = z_1(t)$$

$$\forall t \in [a, b]$$



# Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals

## Theorem

Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und seien  $\gamma_0, \gamma_1$  in  $\Omega$  homotope Kurven. Dann ist

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

# Zusammenhang

# Zusammenhang

## Definition

Eine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *zusammenhängend*, falls es nicht zwei nicht-leere, disjunkte, offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$  mit  $\Omega = U_1 \cup U_2$  gibt.

Sie heißt *wegzusammenhängend*, falls für alle  $z_1, z_2 \in \Omega$  eine stetige Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(0) = z_1$  und  $\gamma(1) = z_2$  existiert.

# Zusammenhang

## Definition

Eine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *zusammenhängend*, falls es nicht zwei nicht-leere, disjunkte, offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$  mit  $\Omega = U_1 \cup U_2$  gibt.

Sie heißt *wegzusammenhängend*, falls für alle  $z_1, z_2 \in \Omega$  eine stetige Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(0) = z_1$  und  $\gamma(1) = z_2$  existiert.

*Bemerkung:* Für  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen sind zusammenhängend und wegzusammenhängend äquivalent. (Allgemein gilt nur „ $\Leftarrow$ “ in topologischen Räumen, „ $\Rightarrow$ “ benötigt Zusatzvoraussetzungen.)

# Zusammenhang

## Definition

Eine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *zusammenhängend*, falls es nicht zwei nicht-leere, disjunkte, offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$  mit  $\Omega = U_1 \cup U_2$  gibt.

Sie heißt *wegzusammenhängend*, falls für alle  $z_1, z_2 \in \Omega$  eine stetige Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(0) = z_1$  und  $\gamma(1) = z_2$  existiert.

*Bemerkung:* Für  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen sind zusammenhängend und wegzusammenhängend äquivalent. (Allgemein gilt nur „ $\Leftarrow$ “ in topologischen Räumen, „ $\Rightarrow$ “ benötigt Zusatzvoraussetzungen.)

## Definition

Unter einem *Gebiet* verstehen wir eine nicht-leere, offene, zusammenhängende Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$ .

# Einfach zusammenhängende Mengen

# Einfach zusammenhängende Mengen

## Definition

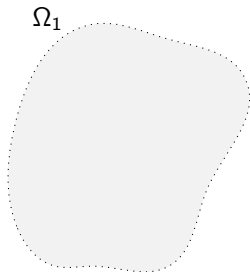
Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

# Einfach zusammenhängende Mengen

## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:

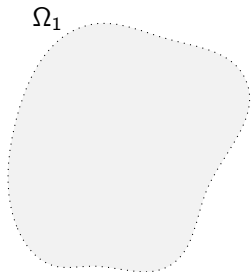


# Einfach zusammenhängende Mengen

## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



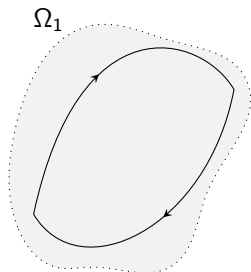
einfach zusammenhängend

# Einfach zusammenhängende Mengen

## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



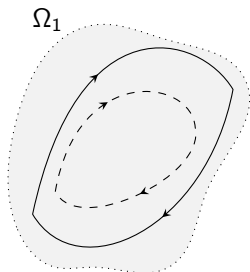
einfach zusammenhängend

# Einfach zusammenhängende Mengen

## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



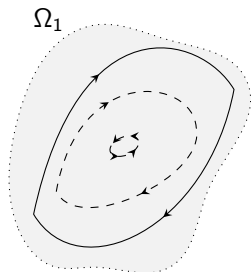
einfach zusammenhängend

# Einfach zusammenhängende Mengen

## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



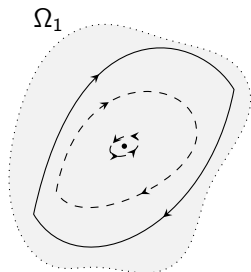
einfach zusammenhängend

# Einfach zusammenhängende Mengen

## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



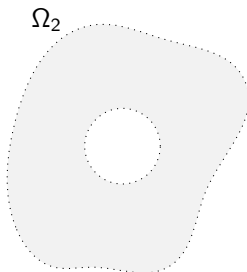
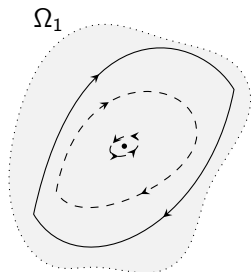
einfach zusammenhängend

# Einfach zusammenhängende Mengen

## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



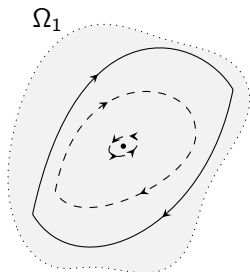
einfach zusammenhängend

# Einfach zusammenhängende Mengen

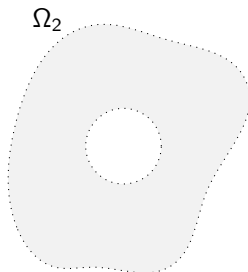
## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



einfach zusammenhängend



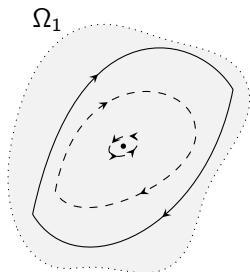
nicht einfach zusammenhängend

# Einfach zusammenhängende Mengen

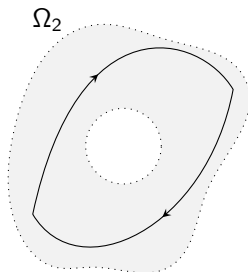
## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



einfach zusammenhängend



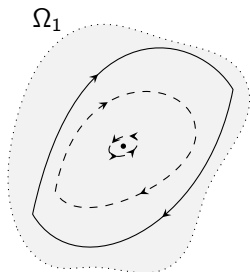
nicht einfach zusammenhängend

# Einfach zusammenhängende Mengen

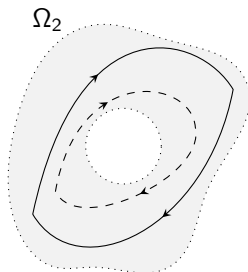
## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



einfach zusammenhängend



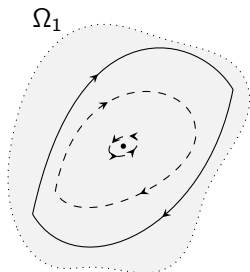
nicht einfach zusammenhängend

# Einfach zusammenhängende Mengen

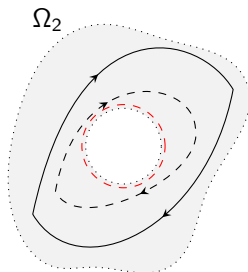
## Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in  $\Omega$  sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



einfach zusammenhängend



nicht einfach zusammenhängend

# Cauchysche Integralformel

# Cauchysche Integralformel

## Theorem

Seien  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann ist  $f$  beliebig oft (komplex) differenzierbar in  $\Omega$  und für jede Kreisscheibe  $D$  mit  $\overline{D} \subset \Omega$  gilt mit  $C := \partial D$ ,  $z \in D$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ , dass

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

# Cauchysche Integralformel

## Theorem

Seien  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann ist  $f$  beliebig oft (komplex) differenzierbar in  $\Omega$  und für jede Kreisscheibe  $D$  mit  $\overline{D} \subset \Omega$  gilt mit  $C := \partial D$ ,  $z \in D$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ , dass

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Hieraus folgt beispielsweise auch folgende Mittelwertseigenschaft (für geeignete  $z$  und  $r$ ):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi.$$