Tutorium 2

Funktionentheorie

12. & 13. Mai 2025

Ergänzung zum letzten Mal

Ergänzung zum letzten Mal

Das Wurzelkriterium ist *strikt* stärker als das Quotientenkriterium: Für

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2^{-n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

Ergänzung zum letzten Mal

Das Wurzelkriterium ist *strikt* stärker als das Quotientenkriterium: Für

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2^{-n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

haben wir $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, also gilt gemäß „Sandwich-Lemma“ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$.

Ergänzung zum letzten Mal

Das Wurzelkriterium ist *strikt* stärker als das Quotientenkriterium: Für

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ 2^{-n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

haben wir $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, also gilt gemäß „Sandwich-Lemma“ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$. Allerdings ist

$$\frac{|a_{2n+1}|}{|a_{2n}|} = \frac{2^{-(2n+1)+1}}{2^{-2n}} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n+1}|} = \frac{2^{-(2n+2)}}{2^{-(2n+1)+1}} = \frac{1}{4},$$

d.h. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ konvergiert *nicht*. Das Quotientenkriterium ist hier also im Gegensatz zum Wurzelkriterium nicht anwendbar.

Kurven

Kurven

Für Definition einer Kurve und Eigenschaften wie *geschlossen*, *einfach* oder *äquivalent*, s. Vorlesung (im Wesentlichen ist eine Kurve eine stetige Abbildung $z\colon [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ mit $z \in C^1_p([a, b])$).

Kurven

Für Definition einer Kurve und Eigenschaften wie *geschlossen*, *einfach* oder *äquivalent*, s. Vorlesung (im Wesentlichen ist eine Kurve eine stetige Abbildung $z\colon [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ mit $z \in C^1_p([a,b])$).

Definition (Kurve mit umgekehrter Orientierung)

$z^- : [a,b] \to \mathbb{C},\ \ t \mapsto z(b+a-t)$.

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Merkregel für/Intuition zum Faktor $z'(t)$ (rein heuristisch):

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Merkregel für/Intuition zum Faktor $z'(t)$ (rein heuristisch):

- „Wie bei der Substitutionsregel“

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Merkregel für/Intuition zum Faktor $z'(t)$ (rein heuristisch):

- „Wie bei der Substitutionsregel“
- Bezieht „Geschwindigkeit“ der Parametrisierung mit ein

Integration entlang von Kurven

Definition (Kurvenintegral)

Gegeben einer Kurve γ mit Parametrisierung $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und „Knickstellen“ $a = a_0 < \ldots < a_K = b$ definieren wir das *Integral von f entlang γ* mittels

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{K} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Merkregel für/Intuition zum Faktor $z'(t)$ (rein heuristisch):

- „Wie bei der Substitutionsregel“
- Bezieht „Geschwindigkeit“ der Parametrisierung mit ein
- Unabhängigkeit von Parametrisierung (vorausgesetzt, parametrisierte Kurven sind äquivalent im Sinne der Definition aus der Vorlesung)

(Holomorphe) Stammfunktionen

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt $F: \Omega \to \mathbb{C}$ *Stammfunktion (von f)*, falls F holomorph in Ω ist mit $F' = f$.

(Holomorphe) Stammfunktionen

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt $F \colon \Omega \to \mathbb{C}$ *Stammfunktion (von f)*, falls F holomorph in Ω ist mit $F' = f$.

Theorem

Mit Ω, f und F wie oben, gilt für jede Kurve γ in Ω mit Anfangspunkt w_0 und Endpunkt w_1, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(w_1) - F(w_0).$$

Insbesondere gilt, für jede geschlossene Kurve γ (also mit $w_0 = w_1$):

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$