Tutorium 4

Funktionentheorie

26. & 27. Mai 2025

Organisatorisches

https://fdf-uni.github.io/ft

Homotope Kurven

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und seien γ_0, γ_1 zwei Kurven in Ω, die im gleichen Punkt α beginnen und im gleichen Punkt β enden. Die Kurven γ_0 und γ_1 heißen *homotop* in Ω,wenn es für alle Parametrisierungen $z_0, z_1 : [a, b] \to \Omega$ von γ_0 und γ_1 eine stetige Abbildung $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega, (t, s) \to \Gamma_s(t)$ gibt mit

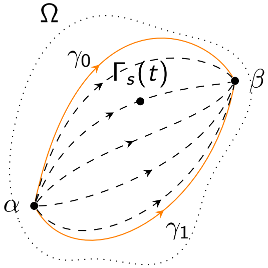
$$\begin{aligned} &\Gamma_s(a) = \alpha, && \Gamma_s(b) = \beta && \forall s \in [0, 1] \\ &\Gamma_0(t) = z_0(t), && \Gamma_1(t) = z_1(t) && \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

Homotope Kurven

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und seien γ_0, γ_1 zwei Kurven in Ω, die im gleichen Punkt α beginnen und im gleichen Punkt β enden. Die Kurven γ_0 und γ_1 heißen *homotop* in Ω,wenn es für alle Parametrisierungen $z_0, z_1 : [a, b] \to \Omega$ von γ_0 und γ_1 eine stetige Abbildung $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega, (t, s) \to \Gamma_s(t)$ gibt mit

$$\begin{aligned} &\Gamma_s(a) = \alpha, && \Gamma_s(b) = \beta && \forall s \in [0, 1] \\ &\Gamma_0(t) = z_0(t), && \Gamma_1(t) = z_1(t) && \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$



Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals

Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und seien γ_0, γ_1 in Ω homotope Kurven. Dann ist

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Zusammenhang

Zusammenhang

Definition

Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *zusammenhängend*, falls es nicht zwei nicht-leere, disjunkte, offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit $\Omega = U_1 \cup U_2$ gibt.
Sie heißt *wegzusammenhängend*, falls für alle $z_1, z_2 \in \Omega$ eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$ existiert.

Zusammenhang

Definition

Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *zusammenhängend*, falls es nicht zwei nicht-leere, disjunkte, offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit $\Omega = U_1 \cup U_2$ gibt.
Sie heißt *wegzusammenhängend*, falls für alle $z_1, z_2 \in \Omega$ eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$ existiert.

Bemerkung: Für $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen sind zusammenhängend und wegzusammenhängend äquivalent. (Allgemein gilt nur „$\Leftarrow$“ in topologischen Räumen, „$\Rightarrow$“ benötigt Zusatzvoraussetzungen.)

Zusammenhang

Definition

Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *zusammenhängend*, falls es nicht zwei nicht-leere, disjunkte, offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit $\Omega = U_1 \cup U_2$ gibt.
Sie heißt *wegzusammenhängend*, falls für alle $z_1, z_2 \in \Omega$ eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$ existiert.

Bemerkung: Für $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen sind zusammenhängend und wegzusammenhängend äquivalent. (Allgemein gilt nur „$\Leftarrow$“ in topologischen Räumen, „$\Rightarrow$“ benötigt Zusatzvoraussetzungen.)

Definition

Unter einem *Gebiet* verstehen wir eine nicht-leere, offene, zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Einfach zusammenhängende Mengen

Einfach zusammenhängende Mengen

Definition

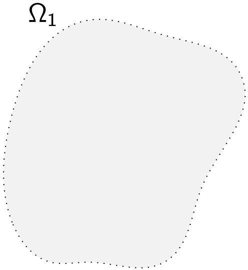
Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Einfach zusammenhängende Mengen

Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:

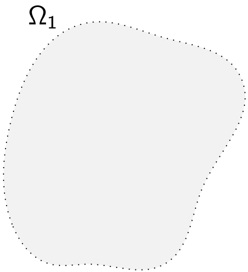


Einfach zusammenhängende Mengen

Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



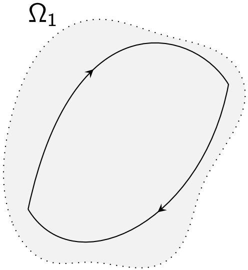
einfach zusammenhängend

Einfach zusammenhängende Mengen

Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



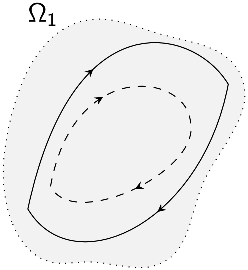
einfach zusammenhängend

Einfach zusammenhängende Mengen

Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



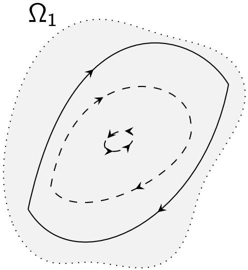
einfach zusammenhängend

Einfach zusammenhängende Mengen

Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



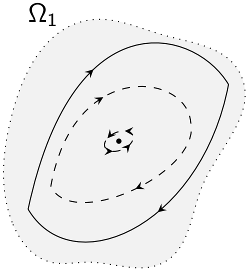
einfach zusammenhängend

Einfach zusammenhängende Mengen

Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen":



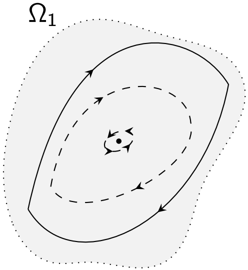
einfach zusammenhängend

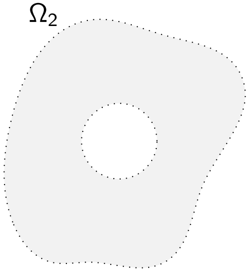
Einfach zusammenhängende Mengen

Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:





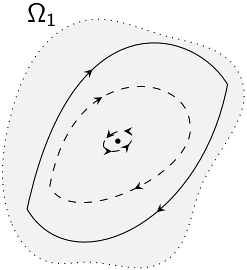
einfach zusammenhängend

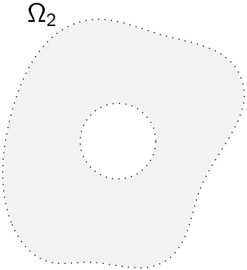
Einfach zusammenhängende Mengen

Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:





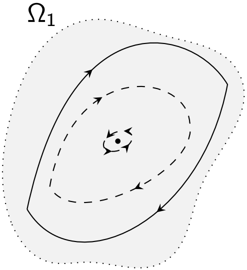
einfach zusammenhängend — nicht einfach zusammenhängend

Einfach zusammenhängende Mengen

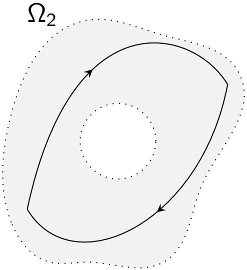
Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



einfach zusammenhängend



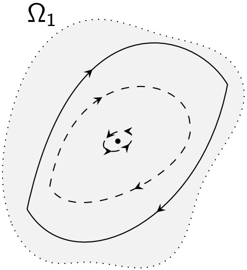
nicht einfach zusammenhängend

Einfach zusammenhängende Mengen

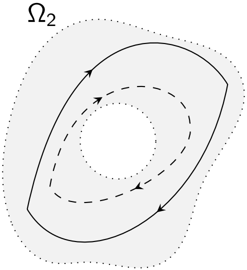
Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



einfach zusammenhängend



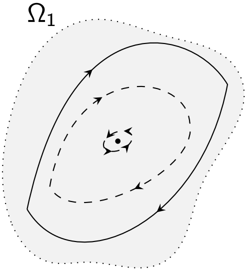
nicht einfach zusammenhängend

Einfach zusammenhängende Mengen

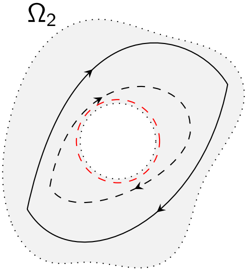
Definition

Eine zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei Kurven mit denselben Endpunkten homotop in Ω sind (äquivalent: jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve, man sagt auch, sie ist *nullhomotop*).

Intuition: Man kann in der Menge jedes „Lasso zusammenziehen“:



einfach zusammenhängend



nicht einfach zusammenhängend

Cauchysche Integralformel

Cauchysche Integralformel

Theorem

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft (komplex) differenzierbar in Ω und für jede Kreisscheibe D mit $\overline{D} \subset \Omega$ gilt mit $C := \partial D$, $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Cauchysche Integralformel

Theorem

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft (komplex) differenzierbar in Ω und für jede Kreisscheibe D mit $\overline{D} \subset \Omega$ gilt mit $C := \partial D$, $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta.$$

Hieraus folgt beispielsweise auch folgende Mittelwertseigenschaft (für geeignete z und r):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \,\mathrm{d}\varphi.$$

Holomorphe Funktionen sind analytisch

Holomorphe Funktionen sind analytisch

Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f analytisch in Ω und für jedes $z_0 \in \Omega$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega).$$

Holomorphe Funktionen sind analytisch

Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f analytisch in Ω und für jedes $z_0 \in \Omega$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega).$$

Theorem (Identitätssatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch in Ω. Falls es eine konvergente Folge $(w_k) \subset \Omega$ von paarweise verschiedenen Punkten mit Grenzwert in Ω gibt, sodass $f(w_k) = g(w_k)$ für alle k, so gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \Omega$.