Tutorium 8

Funktionentheorie

23. bis 25. Juni 2025

Das Argumentprinzip

Theorem

Sei f holomorph in einer Umbegung einer Kreisscheibe $\overline{D}$, bis auf endlich viele Pole. Falls f auf $C = \partial D$ weder Pole noch Nullstellen hat, so gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \#N - \#P,$$

wobei $\#N$ bzw. $\#P$ die Anzahl der Null- bzw. Polstellen von f innerhalb von C bezeichnet, jeweils mit Vielfachheit gezählt.

Das Argumentprinzip

Theorem

Sei f holomorph in einer Umbegung einer Kreisscheibe $\overline{D}$, bis auf endlich viele Pole. Falls f auf $C = \partial D$ weder Pole noch Nullstellen hat, so gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \#N - \#P,$$

wobei $\#N$ bzw. $\#P$ die Anzahl der Null- bzw. Polstellen von f innerhalb von C bezeichnet, jeweils mit Vielfachheit gezählt.

Merkhilfe: $\frac{f'}{f}$ heißt *logarithmische Ableitung*.

Das Argumentprinzip

Theorem

Sei f holomorph in einer Umbegung einer Kreisscheibe $\overline{D}$, bis auf endlich viele Pole. Falls f auf $C = \partial D$ weder Pole noch Nullstellen hat, so gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \#N - \#P,$$

wobei $\#N$ bzw. $\#P$ die Anzahl der Null- bzw. Polstellen von f innerhalb von C bezeichnet, jeweils mit Vielfachheit gezählt.

Merkhilfe: $\frac{f'}{f}$ heißt *logarithmische Ableitung*.
Warum Argumentprinzip?

Das Argumentprinzip

Theorem

Sei f holomorph in einer Umbegung einer Kreisscheibe $\overline{D}$, bis auf endlich viele Pole. Falls f auf $C = \partial D$ weder Pole noch Nullstellen hat, so gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \#N - \#P,$$

wobei $\#N$ bzw. $\#P$ die Anzahl der Null- bzw. Polstellen von f innerhalb von C bezeichnet, jeweils mit Vielfachheit gezählt.

Merkhilfe: $\frac{f'}{f}$ heißt *logarithmische Ableitung*.
Warum Argumentprinzip? $\rightsquigarrow$ s. Animation.

Der Satz von Rouché

Der Satz von Rouché

Theorem

Seien f und g holomorph in Umgebung einer Kreisscheibe $\overline{D}$. Gilt zusätzlich

$$|f(z)| > |g(z)| \qquad \text{für alle } z \in \partial D,$$

so besitzen f und $f + g$ (mit Vielfachheit) gleich viele Nullstellen innerhalb von D.

Offenheits- und Maximumprinzip

Offenheits- und Maximumprinzip

Theorem (Satz von der offenen Abbildung)

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe, nicht-konstante Funktion. Dann ist f eine offene Abbildung, d.h. $f(U)$ ist offen für alle $U \subset \Omega$ offen.

Offenheits- und Maximumprinzip

Theorem (Satz von der offenen Abbildung)

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe, nicht-konstante Funktion. Dann ist f eine offene Abbildung, d.h. $f(U)$ ist offen für alle $U \subset \Omega$ offen.

Theorem (Maximumprinzip)

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe, nicht-konstante Funktion. Dann nimmt $|f|$ auf Ω nicht sein Maximum an. Insbesondere gilt, falls Ω beschränkt ist und f stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden kann:

$$\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.$$

Der (oder vielleicht doch *die*?) Logarithmus (Logarithmen?)

Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und einfach zusammenhängend und sei* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph mit* $f(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \Omega$. *Dann existiert eine holomorphe Abbildung* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *mit*

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \qquad \forall z \in \Omega.$$

Der (oder vielleicht doch *die*?) Logarithmus (Logarithmen?)

Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und einfach zusammenhängend und sei* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph mit* $f(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \Omega$*. Dann existiert eine holomorphe Abbildung* $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *mit*

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \qquad \forall z \in \Omega.$$

Die Funktion g *ist eindeutig bis auf Addition von* $2\pi \mathrm{i} k$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Der (oder vielleicht doch *die*?) Logarithmus (Logarithmen?)

Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$. Dann existiert eine holomorphe Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \qquad \forall z \in \Omega.$$

Die Funktion g ist eindeutig bis auf Addition von $2\pi\mathrm{i}k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Corollary

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend mit $0 \notin \Omega$ und sodass ein $R \in \Omega \cap (0, \infty)$ existiert. Dann existiert eine holomorphe Funktion g in Ω mit $z = \mathrm{e}^{g(z)}$ für alle $z \in \Omega$ und sodass $g(r) = \log(r)$ für $r \in \Omega \cap (0, \infty)$ nahe R.

Der (oder vielleicht doch *die*?) Logarithmus (Logarithmen?)

Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$. Dann existiert eine holomorphe Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \qquad \forall z \in \Omega.$$

Die Funktion g ist eindeutig bis auf Addition von $2\pi\mathrm{i}k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Corollary

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend mit $0 \notin \Omega$ und sodass ein $R \in \Omega \cap (0, \infty)$ existiert. Dann existiert eine holomorphe Funktion g in Ω mit $z = \mathrm{e}^{g(z)}$ für alle $z \in \Omega$ und sodass $g(r) = \log(r)$ für $r \in \Omega \cap (0, \infty)$ nahe R.

Der sogenannte *Hauptzweig des Logarithmus* ist in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ definiert als

$$\operatorname{Log} z = \ln r + \mathrm{i}\theta \text{ für } z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in (-\pi, \pi).$$